Macierze

1 W analizie układu elektrycznego otrzymano następującą macierz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sprawdź, czy $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej równej 2.

Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ znajdujemy, rozwiązując równanie $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

Zatem

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a więc

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \text{ daje } \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijamy wyznacznik względem pierwszej kolumny:

$$(-2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -8 & -12 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

co daje

$$(-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + 8(1-\lambda) = 0,$$

stąd

$$\lambda(\lambda - 2)(1 - \lambda) = 0,$$

zatem

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2.$$

Wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 2$ jest wektor $\mathbf{x}$, spełniający warunek

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} -2x_1 - 8x_2 - 12x_3 = 2x_1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

Z powyższego wynika, że $x_3 = 0$ oraz $x_1 = -2x_2$, więc wybierając $x_2 = 1$, otrzymujemy, że

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej równej 2.

Pytanie